# 8. Простейшая вариационная задача: постановка. Уравнение Эйлера.

1. <https://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/11554.pdf> - методичка, в которой неплохо и понятно расписана теория

2. Конспект лекций

-----------------------------------------------------------------------------

*PS: ответ на “билет” – последние 2 раздела, “* *Постановка простейшей задачи вариационного исчисления” и “* *Уравнение Эйлера”. До этого я написал теорию, может поможет, но можно и не читать.*

-----------------------------------------------------------------------------

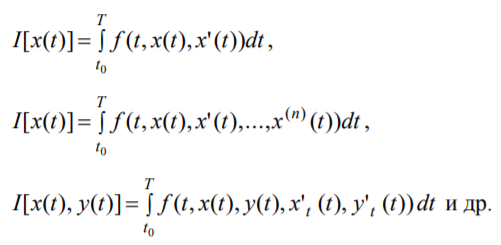
## Подготовка к постановке задачи (теория)

Переменная величина y является **функцией** независимой переменной x, если каждому значению x соответствует определенное значение y.

Переменная величина называется **функционалом**, зависящим от функции и обозначается , если каждой функции из заданного класса функций соответствует определëнное числовое значение .

Совокупность функций, на которых определëн функционал, называется **классом допустимых функций** (*сокращенно КДФ в лекциях*).

**Интегральным функционалом** называется интеграл, под знаком которого содержится некоторая функция. Примеры:



Подынтегральная функция называется **интегрантом**.

*Теорию я взял со стр. 6 [1]. На стр. 6-7 [1] также есть пример, на котором ищется значение функционала. Там же можно подробнее посмотреть про множество M.*

## Постановка задачи вариационного исчисления

**Задачей вариационного исчисления** называется задача нахождения экстремума интегрального функционала .

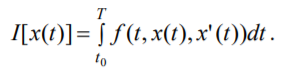
Говорят, что функционал , определенный на некотором классе функций, достигает на кривой глобального минимума (максимума), если:

*Подробнее см. стр. 10-11 [1]. На стр. 11-17 [1] можно найти кучу примеров решения задачи вариационного исчисления, в т.ч. «Задача Дидоны», «Задача о брахистохроне», «Задача о наименьшей площади поверхности вращения», которые он давал в лекции. Можно переписать одну из этих задач в качестве примера – чем больше написано, тем выше шансы :)*

## Постановка простейшей задачи вариационного исчисления

Рассмотрим множество M допустимых функций x(t), удовлетворяющих условиям:

Среди допустимых кривых , принадлежащих допустимому множеству , требуется найти кривую , доставляющую экстремум функционалу:



*Подробнее см. стр. 21 [1]. Можно также глянуть стр. 8 лекций [2], но там гораздо менее подробно расписано (вообще без текста, тупо формулы).*

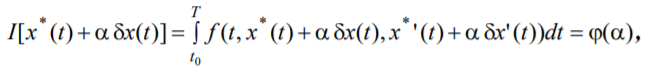
## Уравнение Эйлера

*Уравнение Эйлера лучше вывести. Если времени прямо мало, формула вот: , но больше – лучше. Кстати, в лекции на стр. 8 [2] используется обозначение вместо (искомая функция) и x вместо t (переменная), не путайте.*

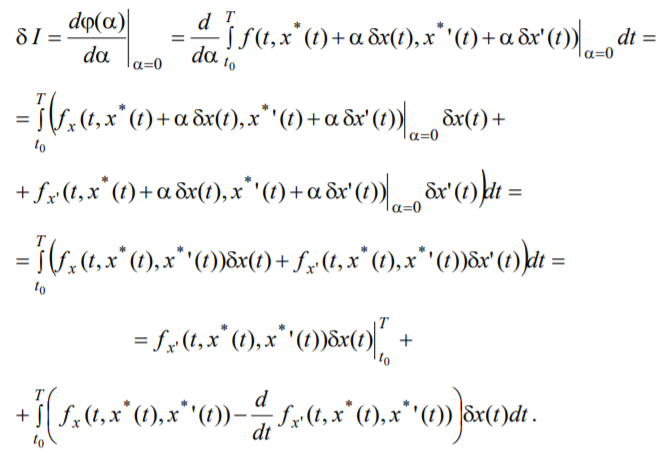
*Если есть желание вникнуть, на стр. 17-18 [1] есть определения первой вариации и приращения функционала. на стр. 21-22 непосредственно вывод уравнения Эйлера с бОльшим количеством деталей.*

Выше мы поставили простейшую задачу вариационного исчисления.

Обозначим – кривую, на которой достигается экстремум функционала. Тогда допустимая кривая определяется по формуле: , а ее производная , где – фиксированная вариация кривой, – производная вариации, – числовой параметр, при этом . Тогда:



Первая вариация:



Первое слагаемое обращается в ноль. Ко второму, по основной лемме вариационного исчисления (*стр. 19 [1]*), составляем условие:

Это и есть **уравнение Эйлера**. При этом, если – дважды дифференцируемая, его можно записать как:



*На стр. 23-25 есть примеры решения уравнений – поиска экстремали функционалов.*